ISBN X-XXXXX-XXX-X ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПЕРЕСЛАВЛЬ-ЗАЛЕССКИЙ, 2006

УДК 517.957

В. А. Юмагужин

REDUCE-программа для вычисления дифференциальных инвариантов гиперболических уравнений Монжа–Ампера

Аннотация. В работе представлена программа для вычисления в системе компьютерной алгебры REDUCE дифференциальных инвариантов гиперболических уравнений Монжа–Ампера общего положения. Эта программа реализует алгоритмы вычисления этих инвариантов, полученные в [1].

Ключевые слова и фразы: Уравнение Монжа–Ампера, контактное преобразование, свертка тензоров, скобка Фролихера–Ниенхейса, дифференциальный инвариант.

1. Введение

В работе [1] автор совместно с А. М. Виноградовым и М. Марваном получил основные дифференциальные инварианты гиперболических уравнений Монжа–Ампера общего положения.

Другие подходы к вычислению дифференциальных инвариантов и решению проблемы эквивалентности уравнений Монжа–Ампера изложены в работах [5–11].

В настоящей работе представлена программа в системе компьютерной алгебры REDUCE, реализующяя алгоритмы, полученные в [1], для вычисления дифференциальных инвариантов гиперболических уравнений Монжа–Ампера общего положения.

Все многообразия и отображения в этой работе предполагаются гладкими.

2. Алгоримы вычисления дифференциальных инвариантов

В этом разделе, следуя [1], мы напоминаем алгоритмы вычисления дифференциальных инвариантов гиперболических уравнений Монжа–Ампера общего положения.

2.1. Уравнения Монжа–Ампера. Уравнение вида

$$N(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)+Az_{xx}+Bz_{xy}+Cz_{yy}+D=0\,, \tag{1}$$

где x, y — независимые переменные, z — зависимая переменная, $z_{xx} = \partial^2 z/\partial x^2$, $z_{xy} = \partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $z_{yy} = \partial^2 z/\partial y^2$, а коэффициенты N, A, B, C, D — функциии от x, y, z, $z_x = \partial z/\partial x$ и $z_y = \partial z/\partial y$, называется уравнением Монжа–Ампера. Гиперболические уравнения (1) выделяются условием

$$\Delta = B^2 - 4AC + 4ND > 0\,.$$

Класс всех гиперболических уравнений Монжа–Ампера сохраняется при контактных преобразований, см. [3].

Обозначим через M пространство переменных x, y, z, z_x, z_y, рассматриваемых как независимые. Как известно, [2], дифференциальная 1-форма $U_1 = dz - z_x dx - z_y dy$ является канонической контактной формой на этом пространстве. В каждом касательном пространстве T_pM к M она определяет контактную гиперплоскость $\mathcal{C}_p = \ker U_1$. Распределение $\mathcal{C} : p \mapsto \mathcal{C}_p$ этих гиперплоскостей называется каноническим контактным распределением. На каждой контактной гиперплоскости $\mathcal{C}_p$ форма $dU_1\big|_{\mathcal{C}_p}$ является симплектической. Имеет место, см. [1],

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{E}$ — уравнение Монжа–Ампера гиперболического типа. Тогда*

(1) *Уравнение $\mathcal{E}$ естественным образом определяет на M пару 2-мерных распределений $\mathcal{D}^1 : p \mapsto \mathcal{D}^1_p$ и $\mathcal{D}^2 : p \mapsto \mathcal{D}^2_p$, удовлетворяющих условиям:*
   (a) *для любой точки $p \in M$ имеет место разложение $\mathcal{C}_p = \mathcal{D}^1_p \oplus \mathcal{D}^2_p$,*
   (b) *подпространства $\mathcal{D}^1_p$ и $\mathcal{D}^2_p$ кособртогональны относительно формы $dU_1\big|_{\mathcal{C}_p}$.*

(2) *Пара распределений $(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$ восстанавливает уравнение $\mathcal{E}$ однозначно.*

(3) *Соответствие $\mathcal{E} \mapsto (\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$ является биекцией между всеми гиперболическими уравнениями (1) и всеми парами 2-мерных распределений на M, удовлетворяющих условиям (1a) и (1b).*

Пусть $N \neq 0$ в уравнении (1), тогда в стандартных координатах распределения $\mathcal{D}^1$ и $\mathcal{D}^2$ задаются векторными полями X_1, X_2 и X_3, X_4 соответственно, где

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} + z_x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{C}{N}\frac{\partial}{\partial z_x} + \frac{B-\sqrt{\Delta}}{2N}\frac{\partial}{\partial z_y}\,, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + z_y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2N}\frac{\partial}{\partial z_x} - \frac{A}{N}\frac{\partial}{\partial z_y}, \\
X_3 &= \frac{\partial}{\partial x} + z_x \frac{\partial}{\partial z} - \frac{C}{N}\frac{\partial}{\partial z_x} + \frac{B+\sqrt{\Delta}}{2N}\frac{\partial}{\partial z_y}\,, \\
X_4 &= \frac{\partial}{\partial y} + z_y \frac{\partial}{\partial z} + \frac{B-\sqrt{\Delta}}{2N}\frac{\partial}{\partial z_x} - \frac{A}{N}\frac{\partial}{\partial z_y}\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Уравнение (1), для которого $N = 0$, подходящим контактным преобразованием приводится к случаю $N \neq 0$. Поэтому мы будем рассматривать только этот случай.

Т. о. всякое уравнение Монжа–Ампера гиперболического типа естественным образом отождествляется с парой 2-мерных нелагранжевых косоортогональных подраспределений в контактном распределении на M. В частности, проблема эквивалентности для этих уравнений относительно контактных преобразований сводится к проблеме эквивалентности для соответсвующих пар подраспределений.

2.2. Проекторы. Для всякого распределения $\mathcal{D}$ на M через $\mathcal{D}^{(1)}$ обозначим распределение, порожденное всеми векторными полями $X, Y \in \mathcal{D}$ и их коммутаторами $[X, Y]$.

Для гиперболического уравнения Монжа–Ампера

$$\dim(\mathcal{D}^1)^{(1)} = \dim(\mathcal{D}^2)^{(1)} = 3$$

Следовательно $\mathcal{D}^3 = (\mathcal{D}^1)^{(1)} \cap (\mathcal{D}^2)^{(1)}$ является 1-мерным распределением, не принадлежащим $\mathcal{C}$. Это влечет разложение касательного расслоения к M в прямую сумму

$$T(M) = \mathcal{D}^1 \oplus \mathcal{D}^2 \oplus \mathcal{D}^3\,. \tag{3}$$

Пусть $\{X_1, \dots, X_5\}$ — поле реперов на M, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{D}^1 = \langle X_1, X_2\rangle, \quad \mathcal{D}^2 = \langle X_3, X_4\rangle, \quad \mathcal{D}^3 = \langle X_5\rangle,$$

а в остальном произвольное. Через $\{\omega^1, \dots, \omega^5\}$ обозначим поле кореперов на M, дуальное к полю реперов $\{X_1, \dots, X_5\}$.

Разложение (3) порождает проекторы

$$\mathcal{P}_i : T(M) \to \mathcal{D}^i,\ i = 1,2,3, \quad \mathcal{P}_j^1 : T(M) \to \mathcal{D}^j \oplus \mathcal{D}^3,\ j = 1,2\,,$$

которые можно интерпретировать как векторнозначные 1-формы:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_1 = \omega^1 \otimes X_1 + \omega^2 \otimes X_2, \quad \mathcal{P}_2 = \omega^3 \otimes X_3 + \omega^4 \otimes X_4, \\ &\mathcal{P}_3 = \omega^5 \otimes X_5, \quad \mathcal{P}_j^1 = \mathcal{P}_j + \mathcal{P}_3,\ j = 1,2. \end{aligned}$$

Эти проекторы — дифференциальные инварианты уравнения $\mathcal{E}$.

2.3. Формы кривизны. Пусть $\mathcal{D}$ — распределение на M. Если определен проектор $\mathcal{P} : T(M) \to \mathcal{D}$, то *форму кривизны* $\mathcal{R}$ этого распределения, см. [4], можно определить формулой

$$\mathcal{R}(X,Y) = (\mathrm{id} - \mathcal{P})(\,[\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)]\,)$$

Кривизнами распределений $\mathcal{D}^1$, $\mathcal{D}^2$, $(\mathcal{D}^1)^{(1)}$ и $(\mathcal{D}^2)^{(1)}$ являются, соответственно, следующие векторнозначные 2-формы:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \otimes X_5\,, \\ &\mathcal{R}_2 = -\omega^3 \wedge \omega^4 \otimes X_5\,, \\ &\mathcal{R}_1^1 = -(b_{15}^3\omega^1 + b_{25}^3\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_3 - (b_{15}^4\omega^1 + b_{25}^4\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_4\,, \\ &\mathcal{R}_2^1 = -(b_{35}^1\omega^3 + b_{45}^1\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_1 - (b_{35}^2\omega^3 + b_{45}^2\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_2\,, \end{aligned}$$

где коэффициенты b_{jk}^i определяются из формул

$$[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^{5} b_{jk}^i X_i\,. \tag{4}$$

Эти 2-формы — дифференциальные инварианты для $\mathcal{E}$.

Применяя естественные операции линейной алгебры и тензорного анализа к проекторам и формам кривизны, можно получить новые дифференциальные инварианты.

2.4. Скалярные инварианты 2-го порядка. Операция свертки $\lrcorner$, применённая к формам кривизны, даёт следующие дифференциальные инварианты:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) = \Lambda_1\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,, \\ &\tfrac{1}{2}\big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) = \Lambda_2\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,, \\ &\big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1\big) \lrcorner \big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner \mathcal{R}_2\big) = \Lambda_{12}\, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,. \end{aligned}$$

Следовательно для уравнения общего вида

$$I^1 = \lambda_{12}/\lambda_1\,, \quad I^2 = \lambda_{12}/\lambda_2\,.$$

являются скалярными дифференциальными инвариантами второго порядка.

2.5. Скалярные инварианты 3-го порядка. Рассмотрим инвариантные 1-формы:

$$\begin{aligned}
&\Omega^1 = \mathcal{P}_1 \lrcorner\, dI^1 = X_1(I^1)\,\omega^1 + X_2(I^1)\,\omega^2\,,\\
&\Omega^2 = \mathcal{P}_1 \lrcorner\, dI^2 = X_1(I^2)\,\omega^1 + X_2(I^2)\,\omega^2\,,\\
&\Omega^3 = \mathcal{P}_2 \lrcorner\, dI^1 = X_3(I^1)\,\omega^3 + X_4(I^1)\,\omega^4\,,\\
&\Omega^4 = \mathcal{P}_2 \lrcorner\, dI^2 = X_3(I^2)\,\omega^3 + X_4(I^2)\,\omega^4\,,\\
&\Omega^5 = \mathcal{P}_3 \lrcorner\, dI^1 = X_5(I^1)\,\omega^5\,, \quad \tilde\Omega^5 = \mathcal{P}_3 \lrcorner\, dI^2 = X_5(I^2)\,\omega^5\,.
\end{aligned}$$

Для уравнения общего вида

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} X_1(I^1) & X_2(I^1)\\ X_1(I^2) & X_2(I^2)\end{vmatrix} \neq 0\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} X_3(I^1) & X_4(I^1)\\ X_3(I^2) & X_4(I^2)\end{vmatrix} \neq 0\,,$$

$$X_5(I^1) \neq 0, \quad X_5(I^2) \neq 0\,.$$

Следовательно $\{\Omega^1, \dots, \Omega^5\}$ — инвариантное поле кореперов на M.

Коэффициент пропорциональности между Ω^5 и $\tilde\Omega^5$

$$I^3 = X_5(I^1)/X_5(I^2)$$

является скалярным дифференциальным инвариантом 3-го порядка. Дальнейшие скалярные инварианты I^4 и I^5 3-го порядка можно получить, например, разлагая инвариантные 2-формы по инвариантному базису $\{\Omega^1, \dots, \Omega^5\}$:

$$\mathcal{R}_1 \lrcorner\, dI^1 = I^4 \Omega^1 \wedge \Omega^2\,, \quad \mathcal{R}_2 \lrcorner\, dI^1 = I^5 \Omega^3 \wedge \Omega^4.$$

Лемма 2. *Скалярные инварианты $I^1, \dots, I^5$ функционально независимы.*

Пусть $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ — гиперболические уравнения Монжа–Ампера общего положения и пусть $I^1, \dots, I^5$ и $\tilde I^1, \dots, \tilde I^5$ соответствующие им функционально независимые скалярные дифференциальные инварианты. Их можно рассматривать как системы координат в M. Имеет место

Теорема 3. *Уравнения $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ локально контактно эквивалентны тогда и только тогда, когда выражение уравнения $\mathcal{E}$ в координатах $I^1, \ldots, I^5$ совпадает с выражением уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$ в координатах $\tilde{I}^1, \ldots, \tilde{I}^5$.*

3. REDUCE-программа

В этом разделе представлена компьютерная программа для вычисления в среде REDUCE версий 3.6 и выше дифференциальных инвариантов полученных в предыдущем разделе. Она использует пакет программ дифференциальной геометрии EXCALC для работы с внешними формами, имеющийся в этих версиях.

3.1. Программа.

COMMENT——————————————————————
При вычислениях естественно считать, что векторные поля X_1, X_2, X_3, X_4 определены формулами (2). Тогда легко получить, что

$$X_5 = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 [X_1, X_2] = \mu_1 X_3 + \mu_2 X_4 - \mu_3 [X_3, X_4]\,.$$

Следовательно, можно выбрать поле X_5 так, что $\mu_3 = 1$. Тогда коэффициенты b^i_{jk} в формулах (4) удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} & b^i_{jk} = -b^i_{kj}, \quad i,j,k = 1,\ldots,5\,, \\ & b^1_{12} = -b^3_{34}, \quad b^2_{12} = -b^4_{34}, \quad b^5_{12} = -b^5_{34} = 1, \\ & b^3_{12} = b^4_{12} = b^1_{34} = b^2_{34} = b^5_{13} = b^5_{14} = b^5_{23} = b^5_{24} = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

—————————————————————————————- ————————————— ;

OFF NAT;

% Подключение пакета EXCALC.
LOAD_PACKAGE EXCALC;

% Фиксирование размерности пространства M.
SPACEDIM 5;

% Задание поля реперов $\{X_1, \ldots, X_5\}$ на M.
TVECTOR X(k);

% Задание поля кореперов $\{\omega^1, \ldots, \omega^5\}$ на M.
PFORM w(k)=1;

% ———————————————————— ——————————

% Символа Кронекера — техническая процедура.

PROCEDURE Kr(k,j);
begin
    scalar s;
    if k=j then s:=1 else s:=0;
    return s;
end;

% —————————————— ——————
% Требование к полям реперов $\{X_1,\ldots,X_5\}$ и кореперов
% $\{\omega^1,\ldots,\omega^5\}$ быть дуальными.
FOR ALL k, j LET X(k)⌋w(j)=Kr(k,j);

% —————————————— ——————
% Операции с нулем: внешнее умножение на 0,
% свертка с 0, производная Ли вдоль нулевого векторного поля,
% производная Ли от 0-формы вдоль векторного поля Y.
FOR ALL Y LET 0^Y=0, Y^0=0, 0⌋Y=0, Y⌋0=0, 0⌊Y=0, Y⌊0=0;

% —————————————— ——————
% Задание коэффициентов разложения b^i_{jk} полей $[X_j,X_k]$
% по базису $X_1,\ldots,X_5$ и их свойства (5).
PFORM b(i,j,k)=0;
FOR ALL i, j, k SUCH THAT i>j LET b(i,j,k)=−b(j,i,k);
FOR ALL k LET b(k, k, j) = 0;
LET b(3,4,3):=−b(1,2,1); b(3,4,4):=−b(1,2,2); b(1,2,3):=0;
b(1,2,4):=0; b(1,2,5):=1; b(3,4,1):=0; b(3,4,2):=0; b(3,4,5):=−1;
b(1,3,5):=0; b(1,4,5):=0; b(2,3,5):=0; b(2,4,5):=0;

% —————————————— ——————
% Определение внешнего дифференциала формы $\omega(k)$.
FOR ALL k LET d(w(k))=−b(1,2,k)*w(1)^w(2) −b(1,3,k)*w(1)^w(3)
−b(1,4,k)*w(1)^w(4)−b(1,5,k)*w(1)^w(5) −b(2,3,k)*w(2)^w(3)
−b(2,4,k)*w(2)^w(4)−b(2,5,k)*w(2)^w(5) −b(3,4,k)*w(3)^w(4)
−b(3,5,k)*w(3)^w(5) −b(4,5,k)*w(4)^w(5);

% —————————————— ——————
% Задание коэффициентов разложения c^i_{jkr} 1-форм
% db^i_{jk} по базису $\omega^1,\ldots,\omega^5$ и их свойства.
PFORM c(i,j,k,r)=0;
FOR ALL l,m,n LET d(b(l,m,n))=c(l,m,n,1)*w(1)+c(l,m,n,2)*w(2)
+c(l,m,n,3)*w(3)+c(l,m,n,4)*w(4)+c(l,m,n,5)*w(5);
FOR ALL i, j, k, r SUCH THAT i>j LET c(i,j,k,r)=−c(j,i,k,r)

```
FOR ALL i,j,k LET c(i,i,j,k)=0;
FOR ALL r LET c(3,4,3,r) = −c(1,2,1,r); c(3,4,4,r)=−c(1,2,2,r);
c(1,2,3,r) =0; c(1,2,4,r) =0; c(1,2,5,r) =0; c(3,4,1,r) =0; c(3,4,2,r) =0;
c(3,4,5,r) =0; c(1,3,5,r) =0; c(1,4,5,r) =0; c(2,3,5,r) =0;
c(2,4,5,r) =0;

% ———————————————— ————————
% Степень векторно-значной формы p.
PROCEDURE Dgrvf(p);
begin
    scalar s1, s2, s3, s4, s5;
    s1:=exdegree(p(1)); s2:=exdegree(p(2)); s3:=exdegree(p(3));
    s4:=exdegree(p(4)); s5:=exdegree(p(5));
    return max(s1,s2,s3,s4,s5);
end;

% ———————————————— ————————
% Свертка векторно-значных дифференциальных форм p и q.
PROCEDURE Cntrcn(p,q);
begin
    scalar dgrp,dgrq,zn;
    dgrp:=Dgrvf(p);
    dgrq:=Dgrvf(q);
    pform cntr(k)=dgrp+dgrq−1;
    for r:=1:5 do cntr(r):= for k:=1:5 sum(p(k)^(X(k)⌋q(r)));
    return cntr;
end;

% ———————————————— ————————
% Подстановка векторного поля Y в векторно-значную
% дифференциальную форму p.
PROCEDURE Cntrcn(Y,p);
begin
    pform cntr1(k)=Dgrvf(p)−1;
    for r:=1:5 do cntr1(r):= for k:=1:5 sum ( Y ⌋ p(r) );
    return cntr1;
end;

% ———————————————— ————————
% Свертка векторно-значной дифференциальной k-формы.
```

```
PROCEDURE IntrCntrcn(p);
begin
    SCALAR s;
    s:=Dgrvf(p);
    IF (s>0) THEN
    «s:=s−1;
    pform p1,p2(k)=s;
    for k:= 1:5 do p2(k):= ( X(k) ⌟ p(k) );
    pr1:= for k:=1:5 sum p2(k);
    CLEAR p2;
    RETURN pr1»;
    ELSE «WRITE "Argument of IntrCntrcn is improper"; end»;
end;
% ———————————————————— ————————————
% Скобка Фролихера–Ниенхейса векторно-значных
% дифференциальных форм p и q.
PROCEDURE FNbr(p,q);
begin
    scalar dgrp,dgrq,zn;
    dgrp:=Dgrvf(p);
    dgrq:=Dgrvf(q);
    zn:= Znk(dgrp);
    pform fnb(k),fnb1(k)=dgrp+dgrq;
    for r:=1:5 do
    « for s:=1:5 do fnb1(s):= for j:=1:5 sum p(s)^q(j)*b(s,j,r);
    fnb(r):= for k:=1:5 sum( fnb1(k) + p(k)^( Y(k)∟ q(r) )
    - ( Y(k)∟ p(r) )^q(k) + zn*( d p(k) )^( Y(k) ⌟ q(r) )
    + zn*( Y(k)⌟ p(r) )^( d q(k) ) ) »;
    clear fnb1;
    return fnb;
    end;
% ———————————————————— ————————————
ORDER FACTOR w(1)^w(2)^w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2)^w(3)^w(4), w(1)^w(2)^w(4)^w(5), w(1)^w(3)^w(4)^w(5),
w(2)^w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2)^w(3), w(1)^w(2)^w(4), w(1)^w(2)^w(5), w(1)^w(3)^w(4),
```

w(1)^w(3)^w(5), w(1)^w(4)^w(5), w(2)^w(3)^w(4), w(2)^w(3)^w(5),
w(2)^w(4)^w(5), w(3)^w(4)^w(5),
w(1)^w(2), w(1)^w(3), w(1)^w(4), w(1)^w(5), w(2)^w(3),
w(2)^w(4), w(2)^w(5), w(3)^w(4), w(3)^w(5), w(4)^w(5),
w(1),w(2),w(3),w(4),w(5);

3.2. Пример. В качестве примера вычислим векторно-значную 3-форму $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$.

Для этого к программе из предыдущего пункта дописываем следующую программу и запускаем в среде REDUCE.

PFORM $\{\mathcal{R}_2^1(k), \mathcal{R}_1(k)\}$=2, $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$(k)=3;

$\mathcal{R}_2^1(1)$:=(b(3,5,1)*w(3)+b(4,5,1)*w(4))^w(5);
$\mathcal{R}_2^1(2)$:=(b(3,5,2)*w(3)+b(4,5,2)*w(4))^w(5); $\mathcal{R}_2^1(3) := 0$; $\mathcal{R}_2^1(4) := 0$;
$\mathcal{R}_2^1(5) := 0$;
$\mathcal{R}_1(1) := 0$; $\mathcal{R}_1(2) := 0$; $\mathcal{R}_1(3) := 0$;
$\mathcal{R}_1(4) := 0$; $\mathcal{R}_1(5) := -$w(1)^w(2);
Cntrcn($\mathcal{R}_2^1$,$\mathcal{R}_1$);
for k:=1:5 do WRITE "$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$(",k,")=", cntr(k);
end;

В результате получаем 5 компонент векторно-значной 3-формы $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1$:

$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(1) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(2) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(3) = 0$; $\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(4) = 0$;
$\mathcal{R}_2^1 \lrcorner \mathcal{R}_1(5) = -$b(3,5,2)*w(1)^w(3)^w(5) $-$b(4,5,2)*w(1)^w(4)^w(5)
+b(3,5,1)*w(2)^w(3)^w(5) +b(4,5,1)*w(2)^w(4)^w(5).

Список литературы

[1] Виноградов А. М., Марван М., Юмагужин В. А. *Дифференциальные инварианты гиперболических уравнений Монжа–Ампера общего положения* // ДАН. — **405**, № 3, 2005, с. 299–301. ↑

[2] Виноградов А. М., Красильщик И. С. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. — Москва: Факториал, 1997, с. 464. ↑

[3] Курант Р. Уравнения с частными производными. — Москва: Мир, 1964, с. 830. ↑

[4] Kruglikov B., Lychagin V. V. *On equivalence of differential equations* // Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math, № 3, 1999, с. 7–29. ↑

[5] Kruglikov B. *Classification of Monge–Ampere equations with two variables* // Geometry and Topology of Caustics–CAUSTICS'98, № 50. — Warsaw: Banach Center Publications, 1999, с. 179–194. ↑

[6] Kushner A. *Symplectic geometry of mixed type equations* // Amer. Math. Soc. Transl., "The Interplay between Geometry and Differential equations", V. V. Lychagin Dds. Ser. 2. — Т. **167**, 1995, с. 131–142. ↑

[7] Lychagin V. V. Lectures on geometry of differential equations. — Roma: Universita La Sapienza, 1992, с. 133. ↑

[8] Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V. *A classification of Monge–Ampere equations* // Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. — **26**, № 4, 1993, с. 281–308. ↑

[9] Morimoto T. *Monge–Ampère equations viewed from contact geometry* // Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields ред. Budzynski R. et al. Т. **39**. — Warsaw: Polish Academy of Sciences, Inst. of Mathematics, Banach Cent. Publ., 1997, с. 105–121. ↑

[10] Tchij O. P. *Contact geometry of hyperbolic Monge–Ampere eqquations* // Lobachevskii Journal of Mathematics. — **4**, 1999, с. 109–162. ↑

[11] Туницкий Д. В. *Уравнения Монжа–Ампера и функторы характеристической связности* // Изв. РАН. — **65**, № 6, 2001, с. 173–222. ↑

Инстиут программных систем Российской академии наук,
Россия, 152020, г. Переславль-Залесский, м. Ботик

Valeriy A. Yumaguzhin. *REDUCE-code to calculate differential invariants of hyperbolic Monge–Ampére equations.* (in russian.)

Abstract. In this paper, the code of the computer algebraic system REDUCE to calculate differential invariants of generic hyperbolic Monge-Ampère equations is represented. This code realizes the algorithms of calculations of these invariants obtained in [1].